BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Я.А.ШАРИФОВ, Н.Б.МАМЕДОВА

Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается задача оптимального управления с нелокальными граничными условиями. Используя формулу приращения функционала первого порядка выведено необходимое условие оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина. Показано, что в частном случае, полученное необходимое условие оптимальности является достаточным.

1. Постановка задачи.

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_T F(x,u,t)\,dt \tag{1.1}$$

на решениях системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,u,t),\ x(t) \in R^n,\ t \in T = [t_0, t_1] \tag{1.2}$$

при нелокальных граничных условиях

$$Ax(t_0) + \int_T m(t)x(t)\,dt + Bx(t_1) = c, \tag{1.3}$$

где $A, B \in R^{n\times n}$ - постоянные матрицы, $m(t) \in R^{n\times n}$, $t \in T$ - матрица функция, $u = u(t)$, $u(t) \in R^r$, $t \in T$ управляющая вектор-функция, $c \in R^n$ - постоянный вектор.

В качестве множества допустимых управлений выберем совокупность ограниченных и измеримых на T r-мерных вектор-функций $u = u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничению типа включения:

$$u(t) \in U,\ t \in T, \tag{1.4}$$

где U - компакт из пространства R^r. Задачу оптимального управления (1.1) – (1.4) рассмотрим при следующих предположениях:

1) вектор-функция $f(x,u,t)$ и скалярные функции $\varphi(x,y)$, $F(x,u,t)$ непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по x, соответственно, на $R^n \times U \times T$, $R^n \times R^n$, $R^n \times U \times T$.

2) матрица-функция $m(t)$, непрерывна на T, причем

$$det(A+\int_T m(t)\,dt+B)\neq 0\,.$$

Можно показать, что при условиях 1), 2) и при некоторых дополнительных условиях краевая задача (1.2), (1.3) имеет единственное решение при каждом фиксированном $u\in U$.

Замечание 1. Если в (1.3) $m(t)\equiv 0$, то краевая задача (1.2), (1.3) превращается в двухточечную задачу, которая подробно изучена в работах [1-5]. В этих работах выведен принцип максимума Понтрягина в оптимальной задаче (1.1)-(1.4), а также вычислен градиент функционала (1.1) при ограничениях (1.2)-(1.4).

Замечание 2. Если в (1.3) $A=E$ (E -единичная матрица), $B\equiv 0$, то получается оптимальная задача, рассмотренная в [5], где вычислен градиент функционала (1.1) при ограничениях (1.2)-(1.4).

Замечание 3. Если в (1.3) $A=B=0$, то получается оптимальная задача, исследованная в [4], где вычислен градиент функционала (1.1) при ограничениях (1.2)-(1.4).

Заметим, что в общем случае краевые условия типа (1.3) охватывают многие частные случаи. Например, можно выбрать матрицы A,B и $m(t)$ таким образом, что краевые условия становятся неразделенными граничными условиями, при выборе этих матриц другими способами краевые условия становятся раздёленными.

2. Формула приращения.

Пусть $\{u,x=x(t,u)\}$ и $\{\tilde{u}=u+\Delta u,\tilde{x}=x+\Delta x=x(t,\tilde{u})\}$ - два допустимых процесса. Можно определить краевую задачу для уравнений в приращениях для задачи (1.2), (1.3):

$$\Delta\dot{x}=\Delta f(x,u,t)\,, \tag{2.1}$$

$$A\Delta x(t_0)+\int_T m(t)\Delta x(t)dt+B\Delta x(t_1)=0\,, \tag{2.2}$$

где через

$$\Delta f(x,u,t)=\Delta f(\tilde{x},\tilde{u},t)-f(x,u,t)$$

обозначено полное приращение функции $f(x,u,t)$. Для частных приращений будем использовать обозначения

$$\Delta_{\tilde{u}} f(x,u,t)=\Delta f(x,\tilde{u},t)-f(x,u,t)\,. \tag{2.3}$$

Введем непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\psi=\psi(t)$, $\psi(t)\in R^n$, $t\in T$ и числовой вектор $\lambda\in R^n$. Оба этих вектора будут использованы при описании сопряженного уравнения.

Тогда приращение функционала можно представить в виде:

$$\Delta J(u)=\Delta\varphi(x(t_0),x(t_1))+\int_T \Delta F(x,u,t)\,dt+\int_T\langle\psi(t),\Delta\dot{x}-\Delta f(x,u,t)\rangle dt+$$
$$+\left\langle\lambda,A\Delta x(t_0)+\int_T m(t)\Delta x(t)\,dt+B\Delta x(t_1)\right\rangle, \tag{2.4}$$

$$\Delta J(u)=\Delta\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)+\int_T \Delta F(x,u,t)dt+\int_T\big\langle\varphi(t),\Delta\dot{x}-\Delta f(x,u,t)\big\rangle dt+$$
$$+\left\langle\lambda, A\Delta x(t_0)+\int_T m(t)\Delta x(t)dt+B\Delta x(t_1)\right\rangle, \tag{2.4}$$

здесь через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим скалярное произведение в R^n.

Проделаем ряд достаточно стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка. В формуле (2.4)

а) введем функцию Понтрягина

$$H(\psi,x,u,t)=\langle\psi(t),f(x,u,t)\rangle-F(x,u,t), \tag{2.5}$$

в) применим формулу Тейлора для $\Delta\varphi$, содержащую члены первого порядка:

$$\Delta\varphi\big(x(t_0),x(t_1)\big)=\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)},\Delta x(t_0)\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)},\Delta x(t_1)\right\rangle+o_\varphi\big(\|\Delta x(t_0)\|,\|\Delta x(t_1)\|\big), \tag{2.6}$$

е) с помощью интегрирования по частям введем тождество

$$\int_T\langle\psi(t),\Delta\dot{x}(t)\rangle dt=\langle\psi(t_1),\Delta x(t_1)\rangle-\langle\psi(t_0),\Delta x(t_0)\rangle-\int_T\langle\dot{\psi}(t),\Delta x(t)\rangle dt. \tag{2.7}$$

Учитывая (2.5)-(2.7) в (2.4) и используя обозначения (2.2), (2.3) для приращения функционала имеем следующую формулу:

$$\Delta J(u)=-\int_T\langle\dot{\psi}(t),\Delta x(t)\rangle dt-\int_T\Delta_{\tilde{x}\tilde{u}}H(\psi,x,u,t)dt+$$
$$+\int_T\langle m'(t)\lambda,\Delta x(t)\rangle dt+\left\langle\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)}-\psi(t_0)+A'\lambda\right],\Delta x(t_0)\right\rangle+ \tag{2.8}$$
$$+\left\langle\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}+\psi(t_1)+B'\lambda\right],\Delta x(t_1)\right\rangle+0_\varphi\big(\|\Delta x(t_0)\|,\|\Delta x(t_1)\|\big),$$

где штрих означает транспонирование и

$$\Delta_{\tilde{x}\tilde{u}}H(\psi,\tilde{x},\tilde{u},t)=H(\psi,\tilde{x},\tilde{u},t)-H(\psi,x,u,t). \tag{2.9}$$

Легко можно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\Delta_{\tilde{x}\tilde{u}}H(\psi,x,u,t)=\Delta_{\tilde{x}}H(\psi,x,\tilde{u},t)+\Delta_{\tilde{u}}H(\psi,x,u,t),$$
$$\Delta_{\tilde{x}}H(\psi,x,\tilde{u},t)=\left\langle\frac{\partial H(\psi,x,\tilde{u},t)}{\partial x},\Delta x(t)\right\rangle+0_H\big(\|\Delta x(t)\|\big),$$
$$\frac{\partial H(\psi,x,\tilde{u},t)}{\partial x}=\Delta_{\tilde{u}}\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}+\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}. \tag{2.10}$$

Используя (2.10) в (2.8), для приращения функционал имеем:

$$\Delta J(u) = -\int_T \Delta_{\tilde u} H(\psi,x,u,t)dt - \int_T \Big\langle \Delta_{\tilde u}\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x} + \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x} +$$
$$+m'(t)\lambda + \dot\psi(t), \Delta x(t)\Big\rangle dt - \left\langle \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)} - \psi(t_0) + A'\lambda\right], \Delta x(t_0)\right\rangle + \qquad (2.11)$$
$$+\left\langle \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)} + \psi(t_1) + B'\lambda\right], \Delta x(t_1)\right\rangle + 0_\varphi\left(\|\Delta x(t_0)\|, \|\Delta x(t_1)\|\right) - \int_T 0_H\left(\|\Delta x(t)\|\right)dt.$$

Произвольную вектор-функцию $\psi(t)\in R^n$, $t\in T$ и числовой вектор λ определим из равенств

$$\dot\psi(t) = -\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x} + m'(t)\lambda\ , \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)} - \psi(t_0) + A'\lambda = 0\,, \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)} + \psi(t_1) + B'\lambda = 0\ . \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.12) называется сопряженным уравнением. Единственное решение сопряженной системы должно удовлетворять граничным условиям (2.13), (2.14). Для нахождения решения (2.12) - (2.14) необходимо найти такие векторы $\psi(t)\in R^n$ и $\lambda\in R^n$, чтобы они удовлетворяли системе дифференциальных уравнений (2.12) и условиям (2.13), (2.14).

Если предположить, что

$$\det\left(A + \int_T m(t)dt + B\right) \neq 0$$

то из системы (2.12) - (2.14) можно исключить вектор $\lambda\in R^n$. Действительно, интегрируем равенство (2.12) по отрезке $T=[t_0,t_1]$ и полученное равенство сложим с равенствами (2.13), (2.14). Тогда, получим

$$\left[A + \int_T m(t)dt + B\right]'\lambda = \int_T \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}dt - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)} - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}\,.$$

Отсюда

$$\lambda = \left[A' + \int_T m'(t)dt + B'\right]^{-1}\left(\int_T \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}dt - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)} - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}\right). \qquad (2.15)$$

Значение λ, определённое равенством (2.15), учтем в равенствах (2.12)-(2.14).

$$\dot\psi(t) = -\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x} + n'(t)\left[A' + \int_T m'(t)dt + B'\right]^{-1}\left(\int_T \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}dt - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)} - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}\right), \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)} - \psi(t_0) + A'\left[A' + \int_T m'(t)dt + B'\right]^{-1}\left(\int_T \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}dt - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)} - \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}\right) = 0\,, \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}+\psi(t_1)+B'\left[A'+\int_T m'(t)dt+B'\right]^{-1}\left(\int_T\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}dt-\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)}-\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}\right)=0\,. \qquad (2.18)$$

Заметим, что равенства (2.16)-(2.18) являются интегро-дифференциальными уравнениями с граничными условиями.

Теперь учтём равенства (2.12)-(2.14) в (2.11). Тогда для приращения функционала получаем следующую формулу:

$$\Delta J(u)=-\int_T\Delta_{\tilde{u}}H(\psi,x,u,t)dt-\int_T\left\langle\Delta_{\tilde{u}}\frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x},\Delta x(t)\right\rangle dt+\eta_{\tilde{u}}\,, \qquad (2.19)$$

где

$$\eta_{\tilde{u}}=0_{\varphi}\left(\|x(t_0)\|,\|x(t_1)\|\right)-\int_T 0_H\left(\|\Delta x(t)\|\right)dt\,. \qquad (2.20)$$

Замечание 4. Если в краевом условии (1.3) $m(t)\equiv 0$, $t\in T$, то получаются двухточечные краевые условия. В этом случае формула приращения функционала (2.19) и сопряженная система (2.12-2.14) совпадают с результатами, полученными в [1,2].

Если в краевом условии (1.3) $A=E$ (E - единичная матрица), $m(t)\equiv 0$, $t\in T$ и $B=0$, то краевая задача (1.2), (1.3) превращается в начальную задачу (задача Коши). И в этом случае полученная формула приращения функционала и сопряженная задача совпадают с известными результатами [6].

3. Принцип максимума Понтрягина.

Рассмотрим формулу приращения целевого функционала на игольчатой вариации допустимого управления. В качестве параметров вариации выберем точку $\tau\in(t_0,t_1]$, число $\varepsilon\in(0,\tau-t_0]$, вектор $\upsilon\in U$. Промежуток варьирования целиком лежит в T. Игольчатую вариацию управления $u=u(t)$ зададим в виде:

$$\tilde{u}(t)=u_{\varepsilon}(t)=\begin{cases}\upsilon\in U, t\in(\tau-\varepsilon,\tau]\subset T\ ,\ \varepsilon>0,\\ u(t),\ t\in T\setminus(\tau-\varepsilon,\tau].\end{cases} \qquad (3.1)$$

Покажем, что $\Delta_{\varepsilon}x(t)$ имеет порядок ε. Краевую задачу (2.1), (2.2) перепишем в виде:

$$\Delta\dot{x}=\Delta_{\tilde{x}}f(x,\tilde{u},t)+\Delta_{\tilde{u}}f(x,u,t)\ , \qquad (3.2)$$

$$A\Delta x(t_0)+\int_T m(t)\Delta x(t)dt+B\Delta x(t_1)=0\,. \qquad (3.3)$$

Введём матрицу

$$M(t)=\int_0^1\frac{\partial f(x(t)+\theta\Delta x(t),\tilde{u},t)}{\partial x}d\theta\,.$$

Тогда для частного приращения имеем формулу

$$\Delta_{\tilde{x}}f(x,\tilde{u},t)=M(t)\Delta x(t)\,. \qquad (3.4)$$

Теперь с помощью введенной матрицы $M(t)$ для допустимого управления $v(t)$, $v(t)\in U$ конструируем краевую задачу, соответствующую (3.2), (3.3).

$$\dot{z}(t) = M(t)z + \Delta_v f(x,u,t) \quad , \tag{3.5}$$
$$Az(t_0) + \int_T m(t)z(t)dt + Bz(t_1) = 0 \, .$$

Лемма. Для $\upsilon(t) = u(t)$ краевая задача (3.5) имеет тривиальное решение и для $\upsilon(t) = \tilde{u}(t)$ решение краевой задачи (3.5) совпадает с решением краевой задачи (3.2), (3.3).

Доказательство леммы имеется в [1].

При условии $\det\left(A + \int_T m(t)dt + B\right) \neq 0$ легко можно показать, что для решения краевой задачи (3.5) имеется оценка:

$$\left\|\Delta z(t)\right\| \le K \int_T \left\|\Delta_v f(x,u,t)\right\| dt \, , \tag{3.6}$$

где $K = const > 0$.

Из (3.6) при $\upsilon(t) = \tilde{u}(t)$ получим

$$\left\|\Delta x(t)\right\| \le K \int_T \left\|\Delta_{\tilde{u}} f(x,u,t)\right\| dt \, , \; K > 0 \; . \tag{3.7}$$

Теперь, пусть $\tilde{u}(t) = u_\varepsilon(t)$, определенное в (3.1). Тогда

$$\left\|\Delta_\varepsilon x(t)\right\| \le K \cdot \varepsilon \, , \; t \in T \, , \; K = const > 0 \; . \tag{3.8}$$

Оценка (3.8) показывает, что для $\tilde{u}(t) = u_\varepsilon(t)$

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left\langle \Delta_v \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial x}, \Delta_\varepsilon x(t) \right\rangle dt + \eta_{u_\varepsilon}\left(\left\|\Delta_\varepsilon x\right\|\right) \sim o(\varepsilon) \quad , \tag{3.9}$$

где

$$\Delta_\varepsilon x(t) = x(t,u_\varepsilon) - x(t,u) \sim \varepsilon \quad . \tag{3.10}$$

Учитывая оценки (3.8)-(3.10) в формуле приращения функционала (2.19) окончательно получаем:

$$\Delta_\varepsilon J(u) = J(u_\varepsilon) - J(u) = -\Delta_v H(\psi,x,u,\tau)\varepsilon + o(\varepsilon) \, , \; \forall \upsilon \in U, \forall \tau \in T \, . \tag{3.11}$$

Пусть $\{u^*, x^* = x(t,u^*)\}$ - оптимальный процесс. Если в (3.1) взять $u(t) = u^*(t)$, то полученное необходимое условие имеет вид принципа максимума Понтрягина. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. (Принцип максимума Понтрягина). Пусть допустимый процесс $\{u^*, x^* = x(t,u^*)\}$ оптимален в задаче (1.1) -(1.4) и $\psi^*(t) = \psi(t,u^*)$ является решением сопряженной задачи (2.12)-(2.14) (или (2.16)-(2.18)). Тогда для $\forall \upsilon \in U$ выполняется неравенство

$$\Delta_v H(\psi^*, x^*, u^*, t) \le 0 \, , \; \forall \upsilon \in U \, . \tag{3.12}$$

Рассмотрим линейно-выпуклый вариант задачи оптимального управления(1.1) – (1.4), в котором правая часть (1.2) линейна по состоянию x и по управлению u :

$$f(x,u,t) = D(t)x + B(t)u,$$

а функции $\varphi(x,y)$ и $F(x,u,t)$ выпуклы по x,y,u.

Справедлива следующая

Теорема 2. Для линейно-выпуклого варианта задачи оптимального управления (1.1) – (1.4) условие (3.12) является необходимым и достаточным условием оптимальности процесса $\{u^*, x^* = x(t,u^*)\}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (проект 06-1000017-8909).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева О.О., Мизуками К. Оптимальное управление краевой задачей. Известия высших учебных заведений. Мат.-ка, 1994, №12 (391), с.33-41.
2. Васильева О.О., Мизуками К. Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения. Известия Академии Наук. Теория и системы управления, 2000, №1, с.95-100.
3. Сардарова Р.А., Шарифов Я.А. О необходимых условиях оптимальности для систем с многоточечными условиями. Известия НАНА. Теория и системы управления, 2004, №2, с.66-70.
4. Mekhtiev M.F., Molaei H.H., Sharifov Y.A. On an optimal control problem for nonlinear systems with integral conditions. Transactions of NASA, series of physical technical and mathematical science, Vol. XXV, 2005, №4, pp.191-198.
5. Molaei H.H. Gradient in optimal control problem with non-local boundary conditions. Transactions of NASA, series of physical technical and mathematical science, Vol. XXVI, 2006, №7, pp.171-176.
6. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971, 507с.

BİR QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ PONTRYAGİNİN MAKSİMUM PRİNSİPİ

Y.Ə.ŞƏRİFOV, N.B.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Bu işdə qeyri-lokal şərtlərlə verilmiş bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Funksionalın I tərtib artım düsturunun köməyilə optimal idarəetmə məsələsi üçün maksimum prinsipi şəklində optimallıq üçün zəruri şərt tapılmışdır. Xüsusi halda bu şərtin həm də kafi olduğu göstərilmişdir.

PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

YA.A.SHARIFOV, N.B.MAMMADOVA

SUMMARY

The paper is focused on the optimal control with non-local boundary conditions. First order necessary condition for optimality is obtained in the customary form of the Pontryagin's maximum principle on the basis of increment formula using the method of increments along with linearization approach. Shown in particular case necessary condition is sufficient.